Seri bahan kuliah Algeo #9

Vektor di Ruang Euclidean
(bagian 1)

Bahan kuliah IF2123 Aljabar Linier dan Geometri

Oleh: Rinaldi Munir

Program Studi Teknik Informatika
STEI-ITB

Definisi Vektor

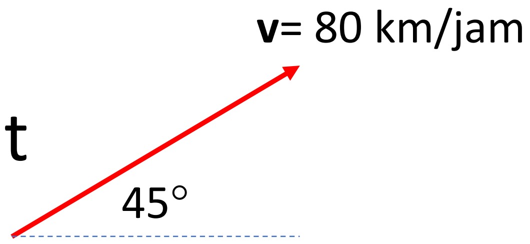
- Kuantitas fisik dapat direpresentasikan dalam dua jenis: skalar dan vektor

- Skalar: nilai numerik yang menyatakan besaran kuantitas fisik tersebut

  Contoh: temperatur 15° C, laju kendaraan 75 km/jam, panjang 2,5 m

- Vektor: kuantitas fisik yang memiliki besar dan arah

  Contoh: kecepatan (**v**) mobil 80 km/jam ke arah timur laut



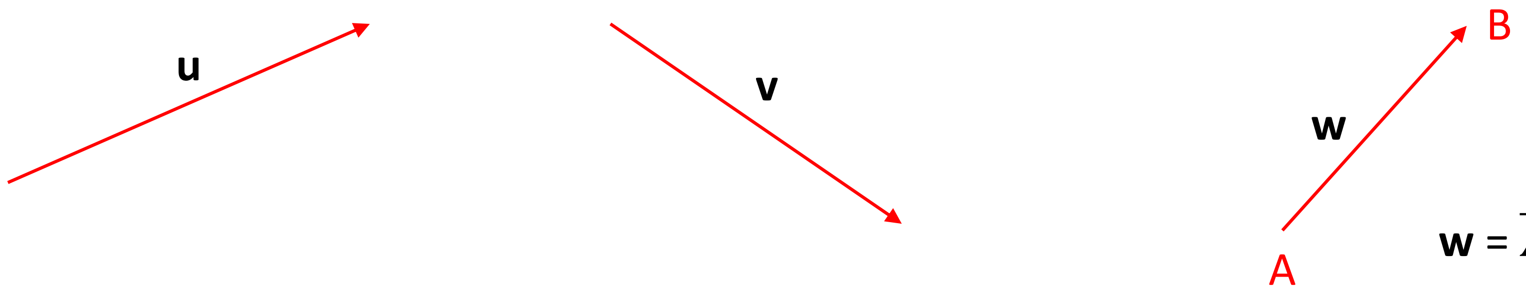
Notasi vektor

- Vektor dilambangkan dengan huruf-huruf kecil (dicetak tebal) atau memakai tanda panah (jika berupa tulisan tangan)

  Contoh, **u**, **v**, **w**, … atau $\overrightarrow{u}, \vec{v}, \overrightarrow{w}$, …

  a, **b**, **c**, …

- Secara geometri, vektor di ruang dwimatra (2D) dinyatakan sebagai garis berarah



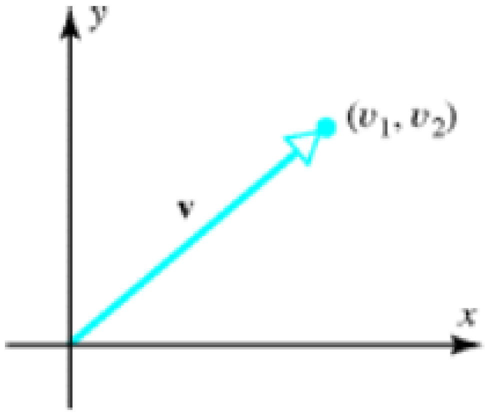
w = $\overrightarrow{AB}$

Ruang Vektor

- Ruang tempat vektor didefinisikan
- Disebut juga ruang Euclidean
- R^2, R^3, R^n

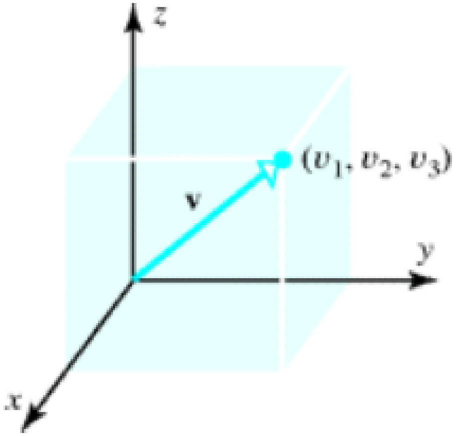
Vektor di R^2

$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ atau $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$



Vektor di R^3

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ atau $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$



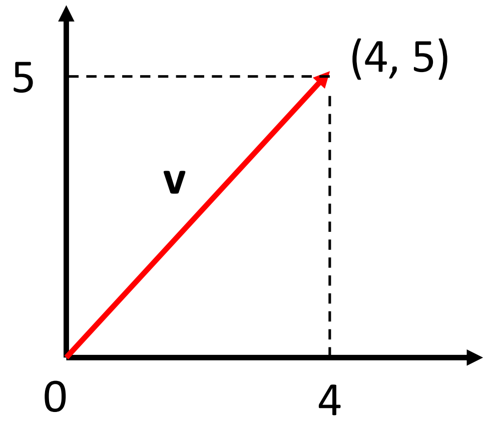
Vektor di R^n:

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ atau $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

(tidak ada gambaran geometri vektor di R^n)

- Semua vektor yang ditulis sebagai $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, atau $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ berawal dari **titik asal** O.

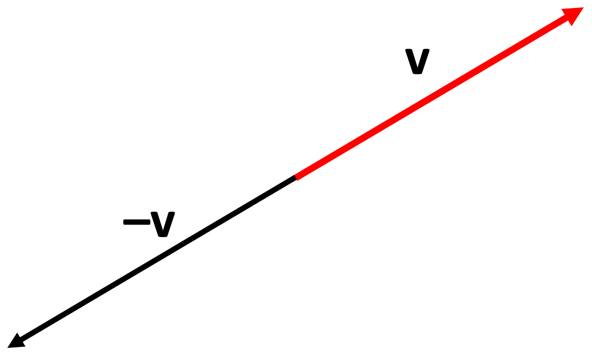
- Titik asal vektor di R^2 adalah (0, 0)
- Titik asal vektor di R^3 adakah (0, 0, 0)
- Titik asal vector di R^n adalah (0, 0, …, 0)



$\mathbf{v} = (4, 5)$

- Vektor nol adalah vektor yang semua komponennya 0
  - Vektor nol dilambangkan dengan $\mathbf{0}$
  - Vektor 0 di R^2: $\mathbf{0} = (0, 0)$
  - Vektor 0 di R^3: $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$
  - Vektor 0 di R^n: $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$

- Negatif dari vektor $\mathbf{v}$ dilambangkan dengan $-\mathbf{v}$



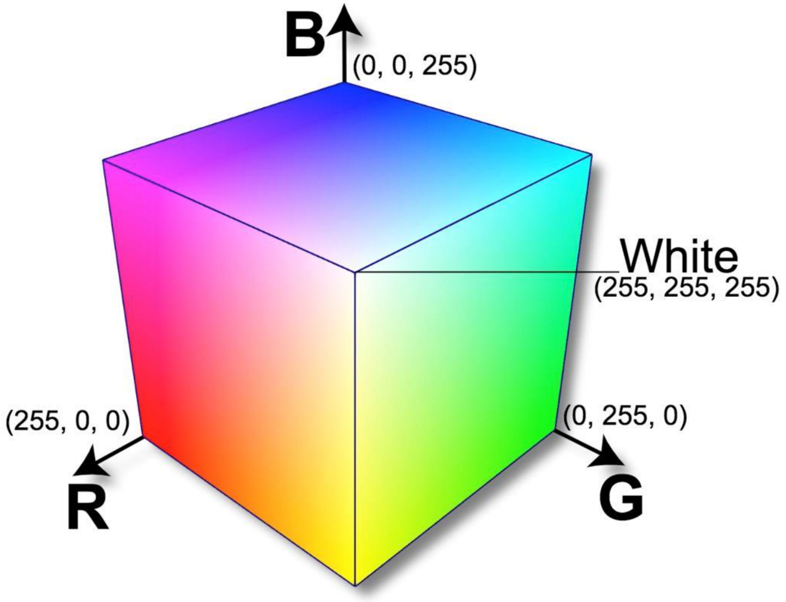
Contoh-contoh vektor:

(i) $\mathbf{u} = (4, 5)$ → vektor di R^2

(ii) $\mathbf{v} = (-2, 3, 10)$ → vektor di R^3

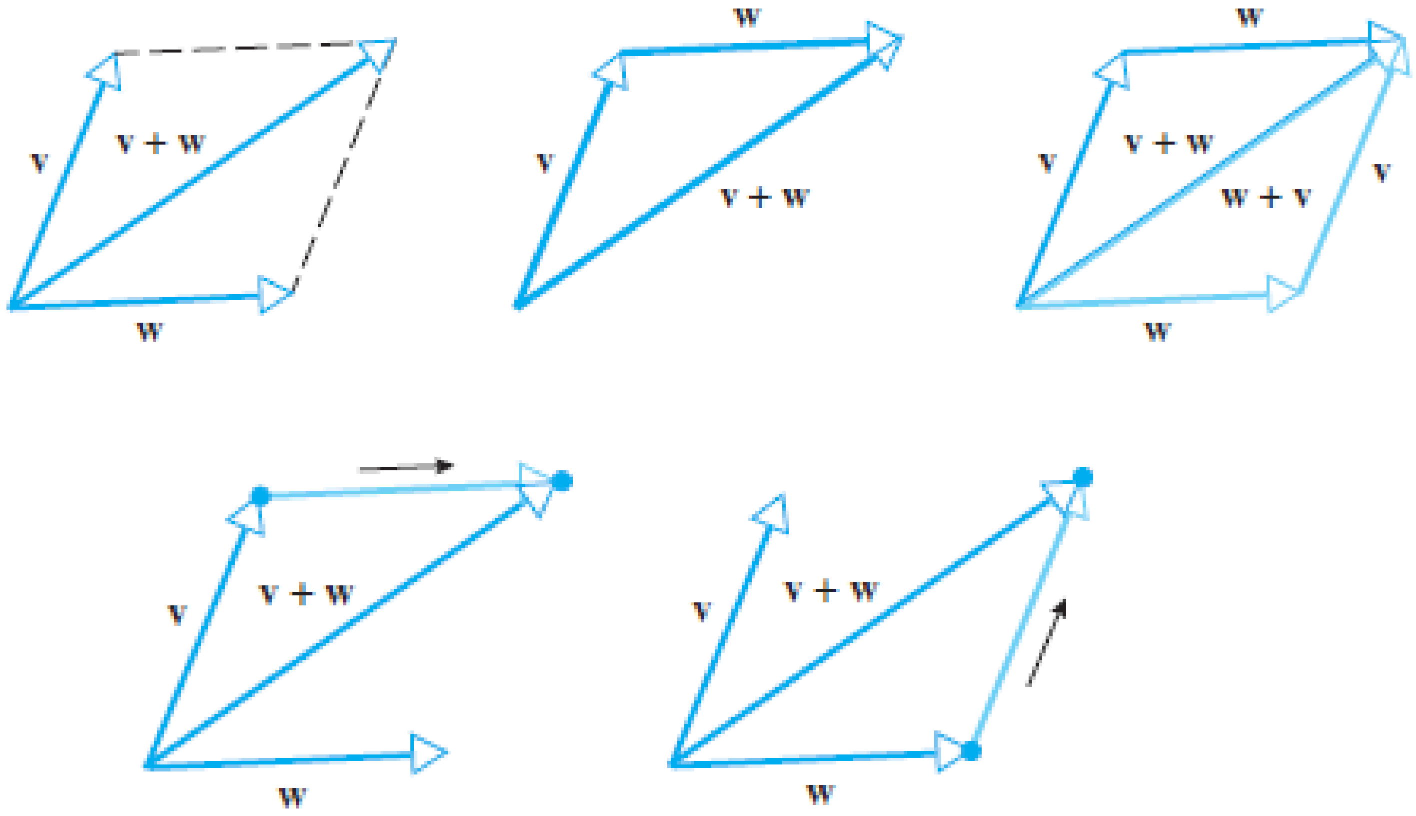
(iii) $\mathbf{w} = (1, -5, 0, 7, 8)$ → vector di R^5

(iv) $\mathbf{c} = (r, g, b)$ → warna di dalam model RGB (red-green-blue)



Penjumlahan dua vektor

- Menggunakan kaidah parallelogram atau kaidah segitiga



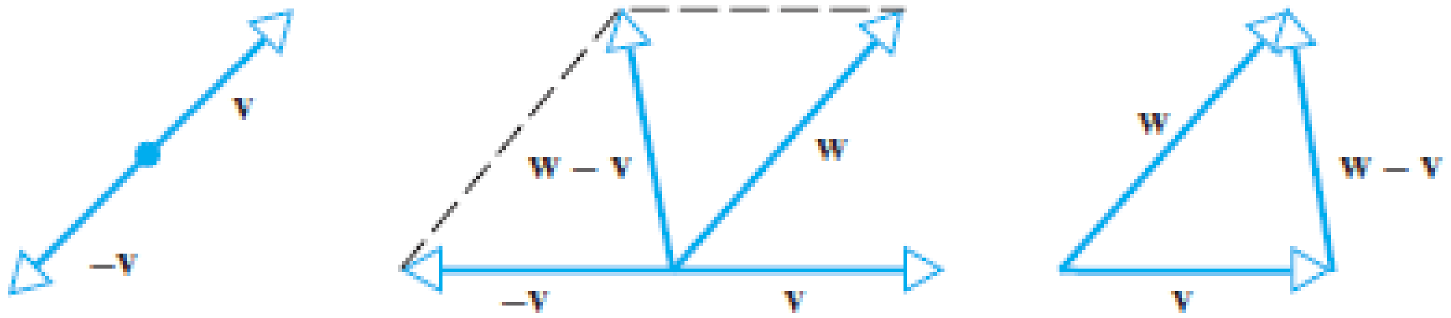
- Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ maka $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n)$

- **Contoh 1:** Misalkan $\mathbf{v} = (3, -1, 4)$ dan $\mathbf{w} = (4, 0, 8)$ maka

$$v + w = (3 + 4, -1 + 0, 4 + 8) = (7, -1, 12)$$

Pengurangan dua vektor

$$\mathbf{w} - \mathbf{v} = \mathbf{w} + (-\mathbf{v})$$



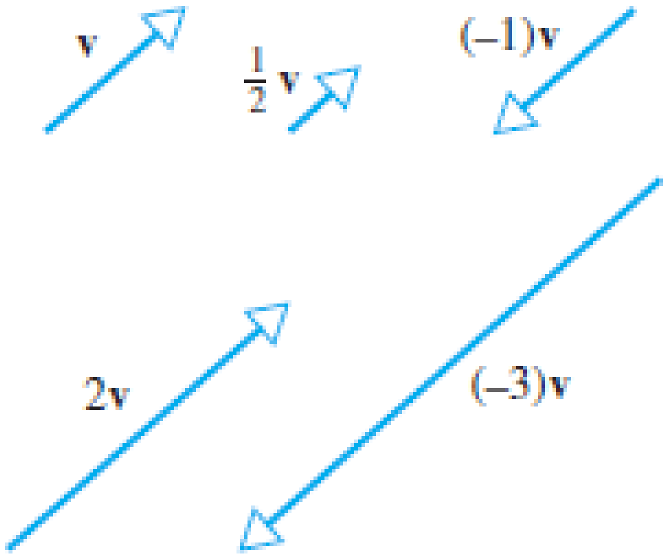
- Jika **v** = $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dan **w** = $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$
  maka **v** – **w** = $(v_1 - w_1, v_2 - w_2, \ldots, v_n - w_n)$

- **Contoh 2:** Misalkan **v** = (3, –1 , 4) dan **w** = (4, 0, 8) maka

  v – **w** = (3 – 4, –1 – 0, 4 – 8) = (–1, –1 , –4)

Perkalian vektor dengan skalar

k**v** = vektor yang panjangnya |k| kali Panjang **v**

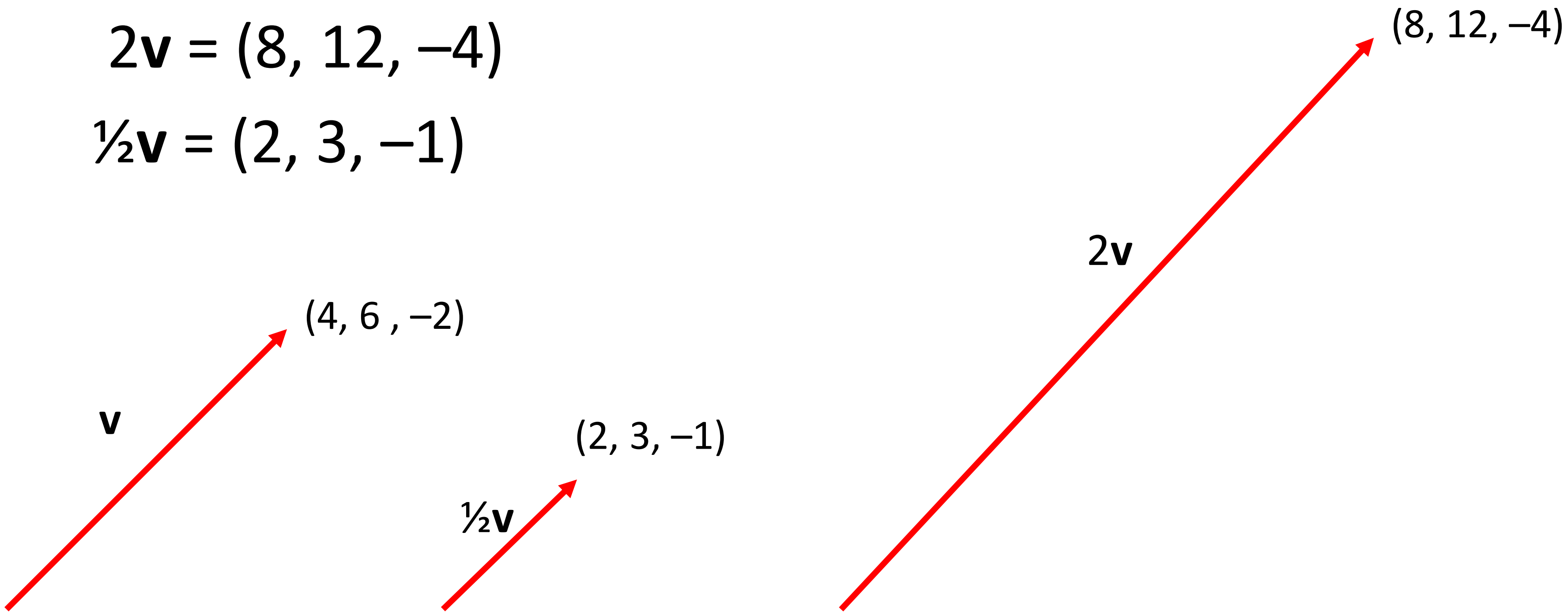


- Jika $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ maka $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n)$

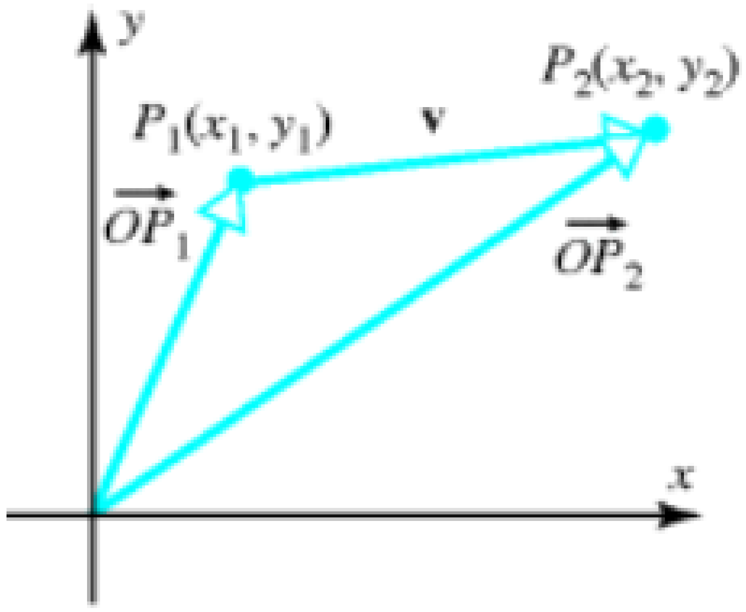
- **Contoh 3:** Misalkan $\mathbf{v} = (4, 6, -2)$ maka

$$2\mathbf{v} = (8, 12, -4)$$

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{v} = (2, 3, -1)$$



Vektor yang tidak berawal dari titik asal



Di R^2 : Misalkan $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$, maka

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$
$$= (x_2, y_2) - (x_1, y_1)$$
$$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Di R^3 : Misalkan $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$, maka

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Contoh 3: Misalkan $P_1(2, -1, 4)$ dan $P_2(7, 5, -8)$, maka

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (7 - 2, 5 - (-1), -8 - 4) = (5, 6, -12)$$

Norma sebuah vektor

- Panjang (atau *magnitude*) sebuah vektor **v** dinamakan **norma** (*norm*) **v**.
- Norma vektor **v** dilambangkan dengan $\|\mathbf{v}\|$.
- Norma sebuah vektor dinamakan juga **norma Euclidean**.

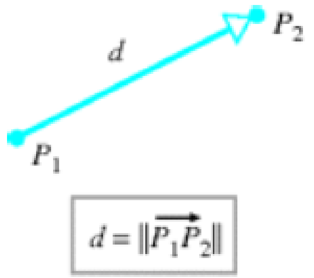
- Norma vektor **v** = (v_1, v_2) di R^2 adalah $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

- Norma vektor **v** = (v_1, v_2, v_3) di R^3adalah $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

- Norma vektor **v** = (v_1, v_2, …, v_n) di R^n adalah $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}$

- Jika $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$ adalah dua titik di R^2 maka jarak (*d*) kedua titik tersebut adalah norma vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$d = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



- Jika $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ adalah dua titik di R^3 maka jarak (*d*) kedua titik tersebut adalah norma vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$d = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah dua titik di R^n maka jarak (*d*) kedua titik tersebut adalah $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}$$

Contoh 4:

(i) Misalkan **v** = (6, –2 , 3), maka norma vektor **v** adalah

$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7$

(ii) Jika $P_1(2, -1, -5)$ dan $P_2(4, -3, 1)$ maka jarak kedua titik adalah

$d = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(4-2)^2 + (-3-(-1))^2 + (1-(-5))^2}$

$= \sqrt{4 + 4 + 36} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$

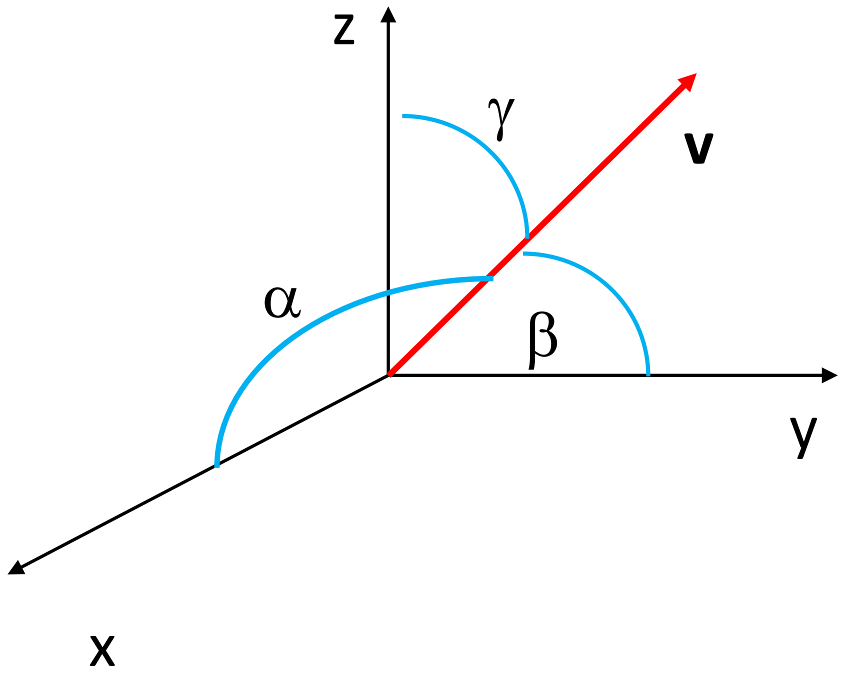
(iii) Misalkan **u** = (1, 3, –2, 7) dan **v** = (0, 7, 2, 2) adalah dua titik di R^4

maka jarak antara **u** dan **v** adalah:

$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(1-0)^2 + (3-7)^2 + (-2-2)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{58}$

Arah sebuah vektor

- Misalkan **v** = (v_1, v_2, v_3) adalah vector di R^3 maka arah vektor **v** adalah



$$\cos \alpha = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$\cos \beta = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$\cos \gamma = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}$$

Bersambung ke bagian 2